Algebraische Geometrie und Kombinatorik im Zusammenhang mit den Arbeiten von Hermann Cäsar Hannibal Schubert

Fritz Hirzebruch[1] <hirzebruch@mpim-bonn.mpg.de>

Wie Schubert (Math. Ann. 1885) interessieren wir uns für die Grassmannsche Mannigfaltigkeit der 2-dimensionalen linearen Unterräume des komplexen Vektorraumes der Dimension $n+2$. Dies ist eine homogene projektive algebraische Mannigfaltigkeit X_n der komplexen Dimension 2_n, die nach Plücker in den projektiven Raum der Dimension $(n+1)(n+2)/2-1$ eingebettet werden kann. Der Grad dieser Einbettung ist die n-te Catalansche Zahl $(2n)!/n!(n+1)!$. Wir betrachten die Schubertschen Klassen f_r. Dabei ist f_r die $(2r)$-dimensionale Kohomologieklasse von X_n, welche unter dem Poincaréschen Isomorphismus der Varietät aller Geraden des P_{n+1} entspricht, die einen vorgegebenen projektiven Unterraum der Dimension $n-r$ schneiden. Schubert studiert die Schnittzahlen, die durch Monome der Dimension $2n$ in den f_r gegeben werden.
Insbesondere liefert f_1^{2n} den oben erwähnten Grad der Plücker-Einbettung. Man kann f_r die r-te symmetrische Potenz der Standarddarstellungen von $SU(2)$ zuordnen. Die Schubertschen Schnittzahlen zu f_r^m mit $r\ m = 2n$ sind dann die Multiplizitäten der trivialen Darstellung f_0 in f_r^m, der m-fachen Tensorpotenz von f_r. Für die Multiplizitäten der irreduziblen Darstellungen f_r in f_r^m gibt es interessante kombinatorische Beschreibungen.

[1] Max-Planck-Institut fuer Mathematik